Übungsblatt mit Lösungen

Exponentialgleichungen & Logarithmen

Aufgabe 1 (Lösen von Exponentialgleichungen):

Forme die folgenden Gleichungen geschickt um und bestimme x:

a) $2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

b) $3^{2x+1} - 5^{x+1} = 3^{2x} + 5^{x}$

c) $32 \cdot \sqrt[x]{8} = 4^{x}$ (Geht ohne Taschenrechner!)

Aufgabe 2 (Beweise):

a) Zeige, dass es für alle Basen $a, b \in N$ eine von x unabhängige Kostante k gibt, so dass gilt: $\log_b(x) = k \cdot \log_a(x)$.

b) Zeige, dass lg(3) irrational ist.

Aufgabe 3 (Verständnisfragen):

a) Schau dir die Seitennummerierung dieser Blätter an.
Warum steht auf der ersten Seite keine 1?

b) Den Graphen des Logarithmus erhält man, in dem man den der Exponentialfunktion mit gleicher Basis an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt.
Warum? Nenne andere Funktionen, bei denen das so ist!

c) Der Logarithmus und die Exponentialfunktion sind nur für Basen >1 definiert. Warum ist das sinnvoll?

d) Eine Taschenrechnerfrage:
Warum ergibt die Eingabe [LOG] [-1] einen Error?

Lösung zu 1 a):

$$
\begin{aligned}
2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} &= 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \\
2^x + 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 &= 3^x + 3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 2^2 \\
2^x \cdot \left(1 + 2^1 + 2^2\right) &= 3^x \cdot \left(1 + 3^1 + 3^2\right) \\
2^x \cdot (1 + 2 + 4) &= 3^x \cdot (1 + 3 + 9) \\
7 \cdot 2^x &= 13 \cdot 3^x && \left| :7 \quad \right| :3^x \\
\frac{2^x}{3^x} &= \frac{13}{7} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{13}{7} && \left|\ \lg(\ldots)\right. \\
\lg\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right) &= \lg\left(\frac{13}{7}\right) \\
x \cdot \lg\left(\frac{2}{3}\right) &= \lg\left(\frac{13}{7}\right) && \left| :\lg\left(\frac{2}{3}\right)\right. \\
x &= \frac{\lg\left(\frac{13}{7}\right)}{\lg\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\lg(13) - \lg(7)}{\lg(2) - \lg(3)}
\end{aligned}
$$

Lösung zu 1 b):

$$
\begin{aligned}
3^{2x+1}-5^{x+1} &= 3^{2x}+5^{x} && \mid +5^{x+1} \quad \mid -3^{2x}\\
3^{2x+1}-3^{2x} &= 5^{x}+5^{x+1} &&\\
3^{2x}\cdot 3^{1}-3^{2x} &= 5^{x}+5^{x}\cdot 5^{1} &&\\
3^{2x}\cdot(3-1) &= 5^{x}\cdot(1+5) && \mid :2 \quad \mid :5^{x}\\
\frac{3^{2x}}{5^{x}} &= \frac{6}{2} &&\\
\left(\frac{3^{2}}{5}\right)^{x} &= 3 && \mid \lg(\ldots)\\
x\cdot\lg\left(\frac{9}{5}\right) &= \lg(3) && \mid :\lg\left(\frac{9}{5}\right)\\
x &= \frac{\lg(3)}{\lg\left(\frac{9}{5}\right)}=\frac{\lg(3)}{\lg(9)-\lg(5)} &&
\end{aligned}
$$

Lösung zu 1 c):

$$
\begin{aligned}
32 \cdot \sqrt[x]{8} &= 4^x \\
32 \cdot 8^{\frac{1}{x}} &= 4^x \\
2^5 \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} &= \left(2^2\right)^x \\
2^5 \cdot 2^{\frac{3}{x}} &= 2^{2x} && \mid \log_2(\ldots) \\
\log_2\left(2^5 \cdot 2^{\frac{3}{x}}\right) &= \log_2\left(2^{2x}\right) \\
\log_2\left(2^5\right) + \log_2\left(\cdot 2^{\frac{3}{x}}\right) &= \log_2\left(2^{2x}\right) \\
5 \cdot \log_2(2) + \frac{3}{x} \cdot \log_2(2) &= 2x \cdot \log_2(2) && \mid \log_2(2) = 1 \\
5 + \frac{3}{x} &= 2x && \mid \cdot x \\
5x + 3 &= 2x^2 && \mid -5x \quad \mid -3 \\
2x^2 - 5x - 3 &= 0 && \mid : 2 \\
x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} &= 0 && \mid pq-\text{Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{24}{16}} \\
&= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} \\
x_1 &= \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\
x_2 &= \frac{5}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Beweis zu 2 a):

Sei $y := \log_b(x)$

Dann gilt: $b^y = x \quad | \log_a(\ldots)$

$\Leftrightarrow \quad \log_a(b^y) = \log_a(x)$

$\Leftrightarrow \quad y \cdot \log_a(b) = \log_a(x) \quad | : \log_a(b)$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Also: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \dfrac{1}{\log_a(b)} \cdot \log_a(x)$

Mit $k := \dfrac{1}{\log_a(b)}$ ergibt sich $\log_b(x) = k \cdot \log_a(x)$. □

Mit dem Beweis wurde auch gezeigt, dass man jeden Logarithmus durch einen Logarithmus mit einer anderen, beliebigen Basis ausdrücken kann, nämlich:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Beweis zu 2 b):

z.z.: $\lg(3) \notin \mathbb{Q}$
Ann: $\lg(3) \in \mathbb{Q}$

Dann existierten $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $\lg(3) = \dfrac{p}{q}$

$\Leftrightarrow \quad 10^{\frac{p}{q}} = 3 \quad | (\ldots)^q$

$\Leftrightarrow \quad 10^{\frac{p}{q} \cdot q} = 3^q$

$\Leftrightarrow \quad 10^p = 3^q$

Widerspruch zur Annahme, da p und q teilerfremd sind.

Also ist die Annahme falsch, die Behauptung also richtig. □

Antwort zu 3 a):

Der Logarithmus zur Basis 1 ist nicht definiert.

Antwort zu 3 b):

Bei der Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden werden die x- und y-Werte vertauscht, man erhält also die Umkehrfunktion – und der Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion.

Weitere Beispiele:

Funktion:	3^x	$2x$	$4x+6$	x^2	$\frac{1}{x}$
Umkehrung:	$\log_3(x)$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$

Antwort zu 3 c):

Angenommen, der Logarithmus wäre auch für die Basis 1 definiert:

$$\log_1(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 1^y = x$$

Egal, wie oft man die 1 mit sich selbst multipliziert, man erhält immer 1. Man dürfte also in den Logarithmus nur die 1 einsetzen.

Bei der 0 ergibt sich das gleiche Problem.

Bei negativen Basen gibt es schon beim Potenzieren ein Problem. Angenommen, die Basis wäre (-2). Dann ergäbe sich keine stetige Funktion mehr, denn:
$(-2)^2 = +4$, aber $(-2)^3 = -8$ und $(-2)^4 = +16$.

Und z.B. $(-2)^{0,5} = \sqrt{(-2)}$ wäre nicht einmal definiert.

Die Funktion wäre also nur für ganzzahlige Werte definiert und würde zwischen + und – hin- und herspringen.

Antwort zu 3 d):

Angenommen, es gäbe eine Lösung für $\log_{10} x = -1$.

Dann müsste es ein x geben mit $10^x = -1$.

Jedes Vielfache und jede Wurzel von 10 ist aber positiv!
Also kann es keine Lösung geben.